АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1985

Известия АН СССР
ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ
И ОКЕАНА
Том 21 • № 6
1985

УДК 551.463.5 : 535.36

САМОСОГЛАСОВАННОЕ ДВУХПОТОКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

ХАЛТУРИН В. И.

Излагается самосогласованный вариант двухпотокового приближения, учитывающий сильную анизотропию рассеяния света в мутных средах. Получена формула для коэффициента диффузного отражения среды при произвольной угловой структуре яркости падающего на ее границу света.

Бо́льшая часть известных в настоящее время аналитических методов расчета световых полей в рассеивающих средах основывается на той или иной разновидности двухпотокового приближения теории переноса излучения [1]. Простота и наглядность конечных результатов, получаемых с помощью этих приближений, и особенно возможность использования их для решения обратных задач выгодно отличают двухпотоковые теории от более точных, но гораздо менее удобных численных методов решения уравнения переноса. В предлагаемой работе развивается вариант двухпотокового приближения, учитывающий сильную анизотропию рассеяния и асимметрию глубинного тела яркости в средах типа морской воды, причем точность выведенных с его помощью формул в ряде случаев приближается к точности численных расчетов явления переноса.

1. Будем исходить из скалярного уравнения переноса оптического излучения в слое рассеивающей и поглощающей среды толщиной H

$$\cos\theta\,\frac{\partial\widetilde{B}(z,\,\theta,\varphi)}{\partial z}+\varepsilon\widetilde{B}(z,\,\theta,\,\varphi)=\frac{\sigma}{4\pi}\int\widetilde{B}(z,\,\theta',\,\varphi')\,x(\gamma)\,do'. \tag{1}$$

Здесь $\widetilde{B}(z,\theta,\varphi)$ — спектральная плотность энергетической яркости (или просто яркость) света; θ и φ — зенитный и азимутальный углы направления распространения света, измеряемые от положительного направления оси oz; $\varepsilon=\varkappa+\sigma$ — показатель ослабления; $\varkappa$ — показатель поглощения; σ — показатель рассеяния света; $do'=\sin\theta' d\theta' d\varphi'$ — элемент телесного угла; $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния света на угол γ, который определяется из соотношения $\cos\gamma=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi-\varphi')$, где $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$, ее нормировка: $\int x(\gamma)\,do'=4\pi$. Система координат здесь выбрана так, что плоскость xy совпадает с внешней границей среды, на которую падает излучение, а ось oz направлена в глубь среды.

В анизотропно рассеивающих свет средах индикатриса $x(\gamma)$ имеет ярко выраженный дифракционный пик вблизи $\gamma=0$. Лучи света, рассеянные в небольшом телесном угле вблизи направления вперед ($\gamma\approx 0$), образуют ореольную часть рассеянного света и практически неотличимы от нерассеявшихся лучей. Это наводит на мысль считать ореольную часть лучей совсем не рассеявшимися, т. е. устранить у индикатрисы рассеяния направленный вперед дифракционный пик.

Выделим основную часть ореольных лучей, представив индикатрису в виде суммы изотропной и анизотропной частей:

$$x(\gamma)=2B+(1-2B)\,x_\delta(\gamma), \tag{2}$$

$$x_\delta(\gamma)=[x(\gamma)-2B]/(1-2B),\quad \int x_\delta(\gamma)\,do'=4\pi,$$

где $B=0{,}5\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x(\gamma)\sin\gamma d\gamma$ — вероятность рассеяния в заднюю полусферу. При увеличении вытянутости индикатрисы выполняется соотношение [2] $\lim\limits_{B\to 0} x_\delta(\gamma)=2\delta(1-\cos\gamma)\equiv 4\pi\delta(\varphi-\varphi')\,\delta(\mu-\mu')$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Введем индикатрису

$$\widetilde{x}(\gamma)=2B+2(1-2B)\,\delta(1-\cos\gamma),\quad \int \widetilde{x}(\gamma)\,do'=4\pi. \tag{3}$$

С учетом (2), (3) запишем (1) в виде

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)\widetilde{B}(z,\mu,\varphi)=\frac{\beta}{2\pi}\int\widetilde{B}(z,\mu',\varphi')\,do'+$$
$$+\frac{\sigma}{4\pi}\int[x(\gamma)-\widetilde{x}(\gamma)]\,\widetilde{B}(z,\mu',\varphi')\,do', \tag{4}$$

где $\alpha=\varkappa+2\beta$, $\beta=\sigma B$ — показатель рассеяния назад.

Пусть $B_q(\mu,\varphi)$ — яркость внешних источников при $z=+0$; $B(z,\mu,\varphi)$ — яркость рассеянной компоненты за вычетом ореольных лучей. Результирующую яркость на глубине z в этом случае представим в виде

$$\widetilde{B}(z,\mu,\varphi)=B(z,\mu,\varphi)+\begin{cases}B_q(\mu,\varphi)\exp(-\alpha z/\mu), & 0<\mu\leqslant 1,\\ 0, & -1\leqslant\mu\leqslant 0.\end{cases} \tag{5}$$

Здесь α имеет смысл показателя ослабления суммы прямых и ореольных лучей. При записи (5) предполагалось, что либо слой рассеивающей среды оптически толст ($\alpha H\gg 1$), либо его нижняя граница отражает свет по закону Ламберта. Подставляя (5) в (4), получаем уравнение для яркости рассеянного света

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial z}+\alpha\right)B(z,\mu,\varphi)=(2\pi)^{-1}\,[\beta h(z)+g(z,\mu,\varphi)+\Delta(z,\mu,\varphi)], \tag{6}$$

где $h(z)$ — скалярная облученность диффузным светом,

$$h(z)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{1}B(z,\mu',\varphi')\,d\mu'; \tag{7}$$

$g(z,\mu,\varphi)$ — функция источника,

$$g(z,\mu,\varphi)=\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^1 x(\gamma)\,B_q(\mu',\varphi')\,e^{-\alpha z/\mu'}\,d\mu'-2\pi\sigma(1-2B)\,B_q(\mu,\varphi)\,e^{-\alpha z/\mu}; \tag{8}$$

$$\Delta(z,\mu,\varphi)=\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{1}[x(\gamma)-\widetilde{x}(\gamma)]\,B(z,\mu',\varphi')\,d\mu'. \tag{9}$$

Уравнение (6) полностью эквивалентно уравнению (1). Пренебрежение величиной $\Delta(z,\mu,\varphi)$ в (6) соответствует включению ореольных лучей в нерассеявшийся прямой световой поток. Выражение (9) тождественно обращается в нуль в двух случаях: а) при изотропном рассеянии: $x(\gamma)=1$, $B=0{,}5$; б) при предельно анизотропном рассеянии: $x(\gamma)=2\delta(1-\cos\gamma)$, $B=0$.

2. Уравнение (6) для произвольных $x(\gamma)$ в аналитическом виде не решается. Пренебрегая слагаемым Δ по сравнению с $\beta h+g$, мы сводим задачу к случаю точно решаемого изотропного рассеяния. Однако получающееся в этом случае эллипсовидное тело яркости в глубине мутной среды плохо описывает экспериментальные результаты [3—5]. Попытаемся, отбросив Δ, учесть его влияние на вытянутость тела яркости косвенным образом.

Будем искать решение задачи (6) в двухпотоковом приближении формально, положив $\Delta=0$ и считая, что распределение яркости в глубине рассеивающего слоя описывается формулой $B^\infty(\mu)\exp(-\Gamma\varepsilon z)$, где $B^\infty(\mu)=(1-\bar{\mu}^2)^2(1-\bar{\mu}\mu)^{-3}$, $\bar{\mu}=0{,}5\int\limits_{-1}^{1}B^\infty(\mu)\mu d\mu$, Γ — параметр глубинного режима. Аппроксимация для $B^\infty(\mu)$ была получена нами из экспериментальных результатов работ [3, 4]. Предложенный прием имеет аналогию в механике. Он соответствует замене неизвестных реальных сил известными связями: силе соответствует Δ, связи — ограничение на форму тела яркости.

Введем облученности (световые потоки) I_i и скалярные облученности h_i сверху ($i=1$) и снизу ($i=2$) формулами

$$I_{1,2}(z)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pm 1}B(z,\mu,\varphi)\mu d\mu,\quad h_{1,2}(z)=\pm\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pm 1}B(z,\mu,\varphi)d\mu,\tag{10а}$$

где верхний знак соответствует индексу 1, а нижний — индексу 2. Средние косинусы по передней (μ_1) и задней (μ_2) половине распределения яркости $B(z,\mu,\varphi)$ будут

$$\mu_i(z)=I_i(z)/h_i(z),\quad i=1,\ 2.\tag{10б}$$

Подставляя в (10) глубинное тело яркости, получим

$$\mu_i(z)\to\tilde{\mu}_i=[2+(-1)^i\bar{\mu}]^{-1}.\tag{11}$$

Отметим, что соотношение $\mu_1=(2-\bar{\mu})^{-1}$ с высокой точностью выполняется в глубине рассеивающего слоя для сред с произвольными значениями σ, $\varkappa$ и B [4], а в морских условиях — и в слое с переходным световым режимом [5].

Действуя на (6) с $\Delta=0$ операторами $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\mu\ \ldots,\ \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-1}^0 d\mu\ \ldots$, учитывая формулы (10), (11) и заменяя средние косинусы $\mu_i(z)$ их значениями в глубинном режиме (11), получим

$$\hat{L}_{ik}I_k(z)=f_i(z),\tag{12}$$

где

$$\hat{L}_{ik}=\begin{Vmatrix} d/dz+(2-\bar{\mu})(\varkappa+\beta) & -(2+\bar{\mu})\beta \\ -(2-\bar{\mu})\beta & -d/dz+(2+\bar{\mu})(\varkappa+\beta)\end{Vmatrix},\tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_1(z)&=\sigma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\mu\,[2B-\psi(\mu)]\,B_q(\mu,\varphi)\exp(-\alpha z/\mu),\\ f_2(z)&=\sigma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\mu\psi(\mu)\,B_q(\mu,\varphi)\exp(-\alpha z/\mu),\end{aligned}\tag{14}$$

$$\psi(\mu)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 p(-\mu',\mu)\,d\mu,\quad p(\mu,\mu')\equiv\int\limits_0^{2\pi}x(\gamma)\,\frac{d\varphi}{2\pi},\tag{15}$$

по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Отрицательное собственное значение системы (12) будет

$$-\alpha_\infty = \bar{\mu}(\varkappa + \beta) - \sqrt{4\varkappa(\varkappa + 2\beta) + \bar{\mu}^2\beta^2}. \tag{16}$$

С другой стороны, точное собственное значение уравнения (1) (и уравнения (6)) есть

$$-\alpha_\infty = -\Gamma\varepsilon \equiv -\varkappa/\bar{\mu}. \tag{17}$$

Примем условие согласования показателей ослабления света в глубинном режиме, заключающееся в эквивалентности формул (16) и (17). В этом случае мы можем найти α_∞ и $\bar{\mu}$ как функции параметров среды $\varkappa$ и β. Решая уравнения (16) и (17) относительно $\bar{\mu}$, имеем

$$\bar{\mu} = [1 + 3\beta/\varkappa + \sqrt{(\beta/\varkappa)(4+9\beta/\varkappa)}]^{-1/2}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем формулу для параметра глубинного режима

$$\Gamma = \{(1-\Lambda)[1-\Lambda(1-3B) + \sqrt{B\Lambda(4-4\Lambda+9B\Lambda)}]\}^{1/2}, \tag{19}$$

где $\Lambda=\sigma/\varepsilon$ — вероятность выживания фотона.

Решение уравнения (12) запишем в виде суммы общего и частного решений

$$I_i(z) = Aa_i\exp(-\alpha_\infty z) + Ee_i\exp(\alpha_0 z) + \int_0^H G_{ik}(z-z')f_k(z')\,dz', \tag{20}$$

где $\alpha_0=\sqrt{4\varkappa(\varkappa+2\beta)+\bar{\mu}^2\beta^2}+\bar{\mu}(\varkappa+\beta)$ — второе собственное значение уравнения (12); $a_1=e_2=1$; $a_2=R_-$; $e_1=R_+$;

$$R_\pm = \frac{(2\pm\bar{\mu})\beta}{(2\mp\bar{\mu})(\varkappa+\beta)+\alpha_\pm} = \frac{(2\pm\bar{\mu})(\varkappa+\beta)-\alpha_\pm}{(2\mp\bar{\mu})\beta}; \tag{21}$$

$\alpha_+\equiv\alpha_0$; $\alpha_-\equiv\alpha_\infty$; постоянные A и E определяются граничными условиями; $G_{ik}(z)$ — матрица Грина, удовлетворяющая уравнению $\hat{L}_{il}G_{lk}(z)=\delta_{ik}\delta(z)$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Нетрудно показать, что она имеет вид

$$G_{ik}(z) = \begin{Vmatrix} 1 & R_+ \\ R_- & R_+R_- \end{Vmatrix} \frac{\theta(z)\,e^{-\alpha_\infty z}}{1-R_+R_-} + \begin{Vmatrix} R_+R_- & R_+ \\ R_- & 1 \end{Vmatrix} \frac{\theta(-z)\,e^{\alpha_0 z}}{1-R_+R_-}, \tag{22}$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда.

Подставляя (22) в (20) и налагая граничные условия при $z=0$, H: $I_1(0)=I_0$; $I_2(H)=A_B[I_1(H)+I_1^f(H)]$, где A_B — альбедо нижней границы, $I_1^f(z)$ — поток суммы нерассеявшихся и ореольных лучей,

$$I_1^f(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 B_q(\mu,\varphi)\exp(-\alpha z/\mu)\,\mu d\mu, \tag{23}$$

получаем формулы для нисходящего и восходящего потоков диффузного излучения

$$\begin{aligned} I_1(z) &= [I_0 + M(z)]\,e^{-\alpha_\infty z} + R_+N(z)(e^{\alpha_0 z} - e^{-\alpha_\infty z}), \\ I_2(z) &= R_-[I_0 + M(z)]\,e^{-\alpha_\infty z} + N(z)(e^{\alpha_0 z} - R_+R_-e^{-\alpha_\infty z}), \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$M(z) = (1-R_+R_-)^{-1}\int_0^z dz'\,\{[f_1(z) + R_+f_2(z)]\,e^{\alpha_\infty z'} - R_+[R_-f_1(z')+f_2(z')]e^{-\alpha_0 z'}\},$$

$$N(z) = (A_B - R_-)(R_+\Delta_H)^{-1}[I_0 + M(H)]\,e^{-\nu H} +$$

$$+(1-R_+R_-)^{-1}\int\limits_z^H dz'\,[R_-f_1(z')+f_2(z')]\,e^{-\alpha_0 z'}+$$

$$+A_B(R_+\Delta_H)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 B_q(\mu,\varphi)\exp[-(\alpha_0+\alpha/\mu)H]\,\mu d\mu,$$

$$\Delta_H=(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)\exp(-\nu H);\ \nu=\alpha_0+\alpha_\infty.$$

3. При чисто диффузном освещении среды возможны два пути решения задачи.

а) Поток прошедшего через верхнюю границу света внешних источников $I_q^0=I_1^f(0)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 B_q(\mu,\varphi)\,\mu d\mu$ считаем полностью диффузным и учитываем с помощью граничного условия $I_1(0)=I_q^0$, при этом $f_i(z)$ полагаем равными нулю. На основании этого сделав в (24) замену $I_0=I_q^0$, $M(z)=0$, $N(z)=(A_B-R_-)I_q^0(R_+\Delta_H)^{-1}\exp(-\nu H)$, имеем

$$I_1(z)=I_q^0\Delta_H^{-1}\{(R_+^{-1}-A_B)\exp(-\alpha_\infty z)+(A_B-R_-)\exp[-\alpha_0(H-z)-\alpha_\infty H]\},\tag{25}$$

$$I_2(z)=I_q^0\Delta_H^{-1}\{R_-(R_+^{-1}-A_B)\exp(-\alpha_\infty z)+R_+^{-1}\times$$
$$\times(A_B-R_-)\exp[-\alpha_0(H-z)-\alpha_\infty H]\}.$$

Вычислим коэффициент пропускания диффузного света слоем $(0, z)$ $T(z)=I_1(z)/I_1(0)$ и коэффициент диффузного отражения (КДО) $R(z)=I_2(z)/I_1(z)$. Воспользовавшись (25), получим

$$T(z)=\frac{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)\exp[-\nu(H-z)]}{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)\exp(-\nu H)}\exp(-\alpha_\infty z),\tag{26}$$

$$R(z)=R_-\frac{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)(R_+R_-)^{-1}\exp[-\nu(H-z)]}{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)\exp[-\nu(H-z)]}.\tag{27}$$

Положив в (27) $z=0$, получаем КДО рассеивающего слоя толщиной H с альбедо нижней границы A_B

$$R=R_-\frac{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)(R_+R_-)^{-1}\exp(-\nu H)}{(R_+^{-1}-A_B)+(A_B-R_-)\exp(-\nu H)}.\tag{28}$$

Формула (28) обобщает так называемую формулу Гуревича — Кубелки — Мунка [6, 7], впервые полученную в 1924 г. Г. А. Гамбурцевым [8], на случай сред с анизотропным рассеянием.

Пусть R_∞ — КДО оптически бесконечно толстого слоя. Переход к пределу $\nu H\to\infty$ в (28) дает $R_\infty=R_-$. После соответствующих выкладок имеем

$$R_\infty=[(1-\bar\mu)/(1+\bar\mu)]^2,\tag{29}$$

где $\bar\mu$ дается формулой (18). При $\beta/\varkappa\to0$

$$R_\infty=\frac{\beta}{4\varkappa}\left(1+\sqrt{\frac{\beta}{\varkappa}}-\frac{\beta}{\varkappa}\right),\quad \frac{\beta}{\varkappa}\ll1,\tag{29а}$$

а для сред с малым истинным поглощением

$$R_\infty=\left(1-2\sqrt{\frac{\varkappa}{6\beta}}\right)\Big/\left(1+2\sqrt{\frac{\varkappa}{6\beta}}\right),\quad \frac{\varkappa}{\beta}\ll1.\tag{29б}$$

В случае изотропного рассеяния выражение (29б) совпадает с асимптотически верной формулой работы [9].

Для решения обратных задач спектроскопии рассеивающих сред необходимо иметь соотношение, выражающее показатель поглощения $\varkappa$ через экспериментально измеряемую величину R_∞ и показатель рассеяния назад β. Воспользовавшись (18) и (29), получим

$$\varkappa = \beta\Phi_H(R_\infty), \quad \Phi_H(R_\infty) = (1-\sqrt{R_\infty})^2(1+4\sqrt{R_\infty}+R_\infty)/(4R_\infty). \tag{30}$$

Функция $\Phi_H(R_\infty)$ точнее [10] функции Кубелки — Мунка $\Phi_K=(1-R_\infty)^2/(2R_\infty)$ [7], особенно при малых R_∞, характерных для океанских акваторий.

б) Рассмотрев условия отражения и пропускания света верхней границей [11—13], определяем угловое распределение яркости, создаваемой внешними источниками. По формулам (14) находим функции источника f_i, а выражения (24), в которых $I_0=0$ (в силу граничного условия $I_1(0)=0$), дают решение задачи. Этот подход пригоден и для случая комбинированного освещения поверхности направленным и дуффузным светом.

4. Нетрудно показать, что для случая произвольного освещения верхней границы оптически бесконечного толстого слоя коэффициент диффузного отражения дается формулой

$$R = (1-\bar{\mu})^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[1+\frac{2\bar{\mu}}{1+\bar{\mu}^2}\,\frac{\psi(\mu)-B}{B}\right] \frac{J(\mu,\varphi)\,\mu d\mu}{1+\mu\bar{\mu}(4-\bar{\mu}^2)}, \tag{31}$$

где $J(\mu,\varphi)\equiv B_q(\mu,\varphi)/I_q^0$ — нормированное распределение яркости прошедшего через верхнюю границу света.

При коллимированном освещении в направлении (μ_s, φ_s) нормированная яркость есть $J_s(\mu,\varphi)=\mu_s^{-1}\delta(\varphi-\varphi_s)\delta(\mu-\mu_s)$. Подставляя J_s в (31), получим

$$R_s = \frac{(1-\bar{\mu})^2}{1+\mu_s\bar{\mu}(4-\bar{\mu}^2)}\left[1+\frac{2\bar{\mu}}{1+\bar{\mu}^2}\,\frac{\psi(\mu_s)-B}{B}\right]. \tag{32}$$

Для случая комбинированного освещения поверхности моря прямым солнечным светом и рассеянным светом небосвода, воспользовавшись выражениями (24), легко получить формулу для КДО оптически глубокого моря

$$R_c=(R_\infty+q\mu_s R_s)/(1+q\mu_s). \tag{33}$$

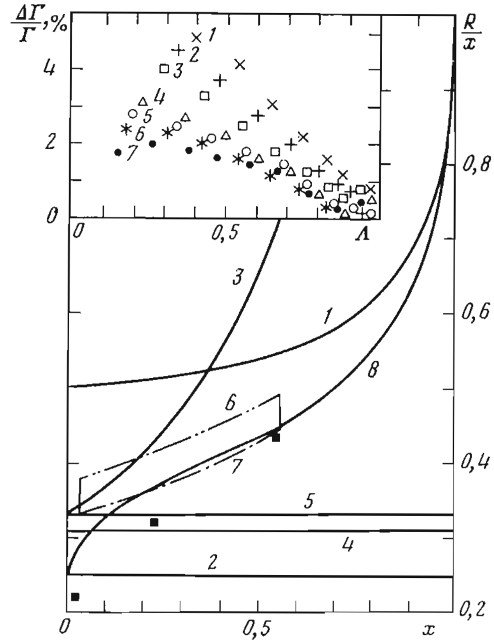
Здесь R_∞ и R_s соответственно даются формулами (29) и (32); $\mu_s=\sqrt{1-\sin^2 Z_\odot/n^2}$ — косинус угла вхождения солнечных лучей в море; $Z_\odot$ — зенитный угол Солнца; n — показатель преломления морской воды; $q=F_s/I_0$, где F_s — освещенность прямым солнечным светом площадки, перпендикулярной его лучам, при $z=+0$; I_0 — освещенность горизонтальной площадки при $z=+0$ диффузным светом небосвода.

Величина q зависит от зенитного угла Солнца и оптических параметров атмосферы. Она может быть рассчитана по формуле, которую можно получить из данных работы [14] *:

$$q(Z_\odot;\tau_R,\tau_A,B_A) = \frac{1-R_F(Z_\odot)}{T_D\cos Z_\odot}\left\{\frac{\exp[(\tau_R+\tau_A)\sec Z_\odot]}{1+(0{,}5\tau_R+B_A\tau_A)\sec Z_\odot}-1\right\}^{-1}; \tag{34}$$

здесь $R_F(Z_\odot)$ — френелевский коэффициент отражения солнечных лучей, T_D — пропускание света небосвода границей раздела воздух — вода, τ_R, τ_A — релеевская и аэрозольная оптические толщины атмосферы, B_A — вероятность рассеяния назад на частицах аэрозоля.

* После принятия статьи в печать автору стало известно, что выражение (34) можно получить также, используя формулу (6) работы Л. Г. Махоткина (О способах вычисления рассеянной освещенности при ясном небе.— Изв. АН СССР. сер. геофизич., 1953, № 5, с. 463—468).



Зависимость отношения КДО R к параметру x как функция этого параметра. Кривые вычислены с использованием формул (35)—(40), (29) при $R_К$ (*1*), $R_Г$ (*2*), $R_М$ (*3*), $R_Л$ (*4*), R_J (*5*), R_G (*6*), $R_В$ (*7*) и R_∞ (*8*). На врезке — относительная погрешность вычисления параметра глубинного режима Г по формуле (19) как функция вероятностей выживания фотона Λ и рассеяния назад B для $B=0{,}25$ (*1*), 0,2 (*2*), 0,15 (*3*), 0,1 (*4*), 0,075 (*5*), 0,05 (*6*), 0,025 (*7*)

5. Оценим точность некоторых полученных формул и сравним их с результатами ряда авторов. Условия применимости двухпотокового приближения в аналитическом виде записать нельзя [1], поэтому поступим традиционным образом — сравним полученные по нашим формулам значения с результатами достаточно точных численных вычислений.

На врезке рисунка показана относительная погрешность вычисления параметра глубинного режима Г, вычисленного по формуле (19). В качестве «точных» были выбраны значения Г, полученные численными методами для различных Λ и B в работах [15, 16]. Видно, что максимальная погрешность вычисления Г по формуле [19] равна 5% и реализуется для случая слабо вытянутых индикатрис ($B\sim0{,}2$) и значений $\Lambda\sim0{,}3\div0{,}4$. Для сред с сильно вытянутой индикатрисой ($B\leqslant0{,}02$) формула (19) справедлива с точностью до 1%, т. е. точностью использованных для оценки численных значений.

Сравним значения коэффициента диффузного отражения R_∞, рассчитанного по формуле (29) с некоторыми широко используемыми формулами для КДО оптически бесконечно глубокого слоя:

$$R_К=[\varkappa+\beta-\sqrt{\varkappa(\varkappa+2\beta)}]/\beta \quad [6-8,\ 17], \tag{35}$$

$$R_Г=\beta/[4(\varkappa+\beta)] \quad [18], \tag{36}$$

$$R_М=0{,}33\,\beta/\varkappa \quad [19], \tag{37}$$

$$R_Л=0{,}31\,\beta/(\varkappa+\beta) \quad [20], \tag{38}$$

$$R_J=\beta/[3(\varkappa+\beta)] \quad [21]. \tag{39}$$

В качестве критерия точности используем формулы [22], полученные аппроксимацией значений, рассчитанных методом Монте-Карло

$$R_{\text{в}}=0,0001+0,3244x+0,1425x^2+0,1308x^3, \qquad (40а)$$

$$R_{\text{G}}=0,0003+0,3687x+0,1802x^2+0,0740x^3; \qquad (40б)$$

здесь $x=\beta/(\varkappa+\beta)=(1-\bar{\mu}^2)^2/(1+4\bar{\mu}^2-\bar{\mu}^4)$. Формула (40а) получена для случая освещения поверхности океана прямым солнечным светом, падающим в надир, а формула (40б) — для случая полностью диффузного освещения.

Рисунок иллюстрирует точность формулы (29) по сравнению с широко использующимися формулами (35)—(39). Для большей наглядности на рисунке изображены отношения R/x, где R рассчитано по формулам (35) — (40) и (29). Зачерненные квадратики соответствуют экспериментальным данным [4]. Видно, что выражение (29) гораздо точнее формул Гуревича — Кубелки — Мунка (35), Джейна и Миллера (39), Голубицкого и др. (36), (38). Формула Мореля и Приера (37) может быть использована лишь при $x\leqslant0,2$.

Таким образом, полученные в рамках самосогласованного двухпотокового приближения формулы (19) и (29) следует признать гораздо более точными по сравнению с известными ранее формулами. Во многих случаях выражение (29) удобнее формул (40а) и (40б), так как оно может быть использовано для сред с любыми значениями β и $\varkappa$.

Приведенное выше сравнение, по-видимому, может служить доказательством хорошей точности предложенного в работе двухпотокового приближения. Результаты практического расчета ряда гидрооптических характеристик океанских вод, в том числе $\bar{\mu}$, Γ, x и R_∞, в спектральном диапазоне 400—700 нм приводятся в работе [23].

Выводы. 1. Изложенный в работе самосогласованный вариант двухпотокового приближения более последовательно, чем теория Гамбурцева — Гуревича — Кубелки — Мунка (ГГКМ), учитывает анизотропию рассеяния. 2. Самосогласованный вариант справедлив при любых значениях параметров Λ и B, причем формулы, полученные в его рамках, дают более точные по сравнению с теорией ГГКМ значения Γ, R_∞, $T(z)$, $R(z)$ и R. 3. Полученные в работе выражения (24) для световых потоков можно рассматривать как нулевое приближение решения уравнения переноса (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеге Э. П.* О двухпотоковом приближении в теории переноса излучения.— Препринт Института физики АН БССР. Минск, 1971. 60 с.
2. *Potter J. P.* The delta-function approximation in radiative transfer theory.— J. Atmos. Sci., 1970, v. 27, № 6, p. 943—949.
3. *Ефименко И. Д., Пелевин В. Н.* Угловое распределение солнечного излучения в водах Индийского океана.— В кн.: Гидрофизические и оптические исследования в Индийском океане. М.: Наука, 1975, с. 124—132.
4. *Тимофеева В. А.* Коэффициент диффузного отражения и его связь с оптическими параметрами мутной среды.— Изв. АН СССР. ФАО, 1971, т. 7, № 6, с. 688—691.
5. *Tyler J. E., Smith R. C.* Measurements of spectral irradiance underwater.— Ocean Sci. 1, New York: Gordon & Breach, 1970, 103 p.
6. *Gurevič M.* Über eine rationelle Klassification der lichtstreuenden Medien.— Phys. Ztschr., 1930, Bd 31, S. 753—763.
7. *Kubelka P., Munk F.* Ein Beitrag zur Optik der Farbanstriche.— Z. Techn. Phys., 1931, Bd 12, S. 593—607.
8. *Гамбурцев Г. А.* К вопросу о цветности моря.— ЖРФХО, часть физич., 1924, т. 56, с. 226—234; переиздание в кн.: Академик Г. А. Гамбурцев. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1960, с. 15—23.
9. *Gate L. F.* Comparison of the photon diffusion model and Kubelka-Munk equation with the exact solution of the radiative transfer equation.— Appl. Optics, 1974, v. 13, № 2, p. 236—238.
10. *Халтурин В. И.* Система уравнений двухпотокового приближения для сред с анизотропным рассеянием.— В кн.: Исследование океана дистанционными методами. Севастополь: МГИ АН УССР, 1981, с. 84—90.

11. *Гершун А. А.* Прохождение света через плоский слой светорассеивающей среды.— Тр. ГОИ, 1936, т. 11, вып. 99, с. 43—68.
12. *Orchard S. E.* Reflection and transmission of light by diffusing suspensions.— J. Opt. Soc. America, 1969, v. 59, № 12, p. 1584—1597.
13. *Gordon J. I.* Directional radiance (luminance) of the sea surface.— Ref. 69—20, San Digo, Calif.: Visibility Lab., SIO, 1969. 50 p.
14. *Deschamps P. Y., Herman M., Tanré D. et al.* Effets atmosphériques et évaluation du signal pour des instruments optiques de télédétection.— ESA Journal, 1982, v. 6, № 2, p. 233—246.
15. *Зеге Э. П.* Световое поле в глубине рассеивающих и поглощающих сред.— Изв. АН СССР. ФАО, 1971, т. 7, № 2, с. 121—132.
16. *Лоскутов В. М.* Световой режим в глубоких слоях мутной среды при сильно вытянутой индикатрисе рассеяния.— Вестн. ЛГУ, 1969, № 13, вып. 3, с. 143—149.
17. *Joseph J.* Untersuchungen über Ober- und Unterlichtmessungen im Meere und über ihren Zusammenhang mit Durchsichtigkeitsmessungen.— Deut. Hydrogr. Z., 1950, Bd 3, S. 324—335.
18. *Голубицкий Б. М., Левин И. М., Танташев М. В.* Коэффициент яркости полубесконечного слоя морской воды.— Изв. АН СССР. ФАО, 1974, т. 10, № 11, с. 1235—1238.
19. *Morel A., Prieur L.* Analysis of variations in ocean color.— Limnol. Oceanogr., 1977, v. 22, № 4, p. 709—722.
20. *Голубицкий Б. М., Левин И. М.* Пропускание и отражение слоя среды с сильно анизотропным рассеянием.— Изв. АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, № 10, с. 1051—1058.
21. *Jain C. S., Miller J. R.* Algebraic expression for the diffuse irradiance reflecting of water from the two-flow model.— Appl. Optics, 1977, v. 16, № 1, p. 202—204.
22. *Gordon H. R., Brown O. B., Jackobs M. M.* Computed relationships between the inherent and apparent optical properties of a flat homogeneous ocean.— Appl. Optics, 1975, v. 14, № 2, p. 417—427.
23. *Халтурин В. И., Суетин В. С., Шутиков С. П.* Таблицы гидрооптических характеристик вод открытого океана (модельный расчет). Ч. 1. Хлорофилл, желтое вещество, крупная взвесь.— Деп. в ВИНИТИ, 1983, № 1876-83 Деп. 90 с.

Академия наук УССР
Морской гидрофизический институт

Поступила в редакцию
10.III.1983
после доработки
2.IV.1984

THE SELF-CONSISTENT TWO-STREAM APPROXIMATION IN RADIATIVE TRANSFER THEORY FOR THE MEDIA WITH ANISOTROPIC SCATTERING

KHALTURIN V. I.

The self-consistent version of two-stream approximation taking into account the strong anisotropy of light scattering in turbid media is developed. A formula is obtained for the diffusive reflectance coefficient of medium for arbitrary angular brightness structure of light falling on the boundary of the medium.